Kolloqium Partielle Differentialgleichungen **08.05.2008**
Carsten Erdmann

L^p Räume und der Satz von Riesz-Fischer

1.1. Definition. Sei $p \in \mathbb{R}, p > 0$, dann setzen wir $\infty^p := \infty$, $\infty^{-p} := 0$. Sei $f : X \to \mathbb{K}$ meßbar, dann ist $|f| \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{A})$ und

$$N_p(f) := (\int_X |f|^p d\mu)^{1/p} \qquad (p \in \mathbb{R}, p \neq 0)$$

ist sinnvoll definiert. Weiterhin ist

$$N_p(\alpha f) = |\alpha| N_p(f) \qquad (\alpha \in \mathbb{K}).$$

Für $p = \infty$ definieren wir

$$N_\infty(f) := \inf\{\alpha \in [0, \infty] : |f| \leq \alpha \quad \mu - f.ü.\}.$$

Dann ist $|f| \leq N_\infty(f)$ μ-f.ü., denn für $N_\infty(f) < \infty$ ist $\{|f| > N_\infty(f)\} = \bigcup_{n=1}^\infty \{|f| > N_\infty(f) + 1/n\}$ eine μ-Nullmenge. Mann nennt $N_\infty(f)$ das *essentielle* oder *wesentliche Supremum* von $|f|$ und schreibt

$$N_\infty(f) = ess \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Weiterhin ist $N_\infty(\alpha f) = |\alpha| N_\infty(f)$ $(\alpha \in \mathbb{K})$ und $N_\infty(f + g) \leq N_\infty(f) + N_\infty(g)$, falls $f, g : X \to \mathbb{K}$ meßbar.

1.2. Definition $\mathcal{L}^p$. Sei $\mathcal{L}^p := \mathcal{L}^p(\mu) := \mathcal{L}^p(X, \mathfrak{A}, \mu)$, $0 < p \leq \infty$ die Menge aller meßbaren Funktionen $f : X \to \mathbb{K}$ mit $N_p(f) < \infty$, und weiterhin

$$\|f\|_p := N_p(f) \qquad f \in \mathcal{L}^p.$$

Falls $p > 0$, ist $\mathcal{L}^p$ also genau die Menge aller meßbaren Funktionen $f : X \to \mathbb{K}$, für die $|f|^p$ μ-integrierbar ist und

$$\|f\|_p = (\int_X |f|^p d\mu)^{1/p} \qquad (f \in \mathcal{L}^p).$$

Falls $p = \infty$, ist $\mathcal{L}^p$ die Menge aller meßbaren Funktionen $f : X \to \mathbb{K}$, für die gilt dass

$$\|f\|_\infty := ess \sup_{x \in X} |f(x)| < \infty.$$

Eine Funktion $x : [a,b] \to \mathbb{K}$ ist genau dann *essentiell* beschränkt, wenn es zu jedem $x \in L^\infty([a,b])$ eine positive Konstante M_x gibt, für die $|x(t)| \leq M_x$ fast überall auf $[a,b]$ gilt. Das kleinste M_x, das man in einer solchen Abschätzung wählen kann, wird als

essentielles Supremum von $|x|$ bezeichnet.

Bemerkungen zu 1.2.

- $\mathcal{L}^p$ ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum für $p > 0$, da $\mathcal{L}^p$ nur Funktionen mit Werten in $\mathbb{K}$ enthält.

- Soll der Skalarenkörper besonders hervorgehoben werden, so schreibt man auch $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}$ oder $\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}$.

- Für alle $f \in \mathcal{L}^p$ gilt $\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f = 0 \quad \mu$-f.ü.

1.3. Satz. Für $1 \leq p \leq \infty$ ist $\mathcal{L}^p$ ein halbnormierter Vektorraum bezüglich $\|\cdot\|_p$ und für $0 < p < 1$ ist

$$d_p(f,g) := \|f-g\|_p^p \qquad (f,g \in \mathcal{L}^p)$$

eine Halbmetrik auf $\mathcal{L}^p$.

Beweis.
Nachzuprüfen sind die Eigenschaften einer Halbnorm, da durch eine Halbnorm eine Halbmetrik induziert wird.

1. Positivität:
$$\|f\|_p = (\int_X |f|^p d\mu)^{1/p} \geq 0$$

2. Homogenität:
$$\|\alpha f\|_p = (\int_X |\alpha f| d\mu)^{1/p} = \alpha (\int_X |f| d\mu)^{1/p} = |\alpha| \, \|f\|_p$$

3. Dreiecksungleichung:
$$\begin{aligned} \|f+g\|_p &= (\int_X |f+g|^p d\mu)^{1/p} \\ &\overset{Minkow.}{\leq} (\int_X |f|^p d\mu)^{1/p} + (\int_X |g|^p d\mu)^{1/p} \\ &= \|f\|_p + \|g\|_p \end{aligned}$$

Bemerkungen zu 1.3.

- $\mathcal{L}^p$ ist für $0 < p < 1$ ein topologischer Vektorraum. Das heißt bezüglich der durch d_p definierten Topologie sind die Addition $\mathcal{L}^p \times \mathcal{L}^p \to \mathcal{L}^p$ und die skalaren Multiplikation $\mathbb{K} \times \mathcal{L}^p \to \mathcal{L}^p$ stetig.

- Der topologische Raum $\mathcal{L}^p$ erfüllt nicht das Hausdorffsche Trennungsaxiom, wenn es eine nicht-leere μ-Nullmenge gibt. Jedoch lässt sich dies wie folgt beheben.
  - Die Menge $\mathscr{N}$ aller meßbaren Funktionen $f : X \to \mathbb{K}$ mit $f = 0$ μ-f.ü. ist ein Untervektorraum von $\mathcal{L}^p$, also ist der Quotientenraum
  $$L^p := L^p(\mu) := \mathcal{L}^p / \mathscr{N} \qquad (0 < p \leq \infty)$$
  sinnvoll definiert
  - Elemente von $\mathcal{L}^p$ sind die Nebenklassen $F = f + \mathscr{N}$ $(f \in \mathcal{L}^p)$. Dabei liegen 2 Funktionen $f, g \in \mathbb{L}^p$ genau dann in der selben Nebenklasse, wenn sie fast überall gleich sind. Addition und skalare Multiplikation werden mit Hilfe von Nebenklassenvertretern definiert, somit ist L^p ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.
  - Ist $F \in L^p$, so hat $\|f\|_p$ für alle $f \in F$ den selben Wert, daher ist die Definition $\|F\|_p := \|f\|_p$ $(f \in F)$ sinnvoll.
  - Für alle $F \in L^p$ ist $\|F\|_p = 0 \Leftrightarrow F = 0$, das heißt L^p erfüllt das Hausdorffsche Trennungsaxiom.

1.4. Satz. Für $1 \leq p \leq \infty$ ist L^p bezüglich $\|\cdot\|_p$ ein normierter Vektorraum und für $0 < p < 1$ ist

$$d_p(f, g) := \|f - g\|_p^p \qquad (f, g \in L^p)$$

eine Metrik auf L^p.

2.1. Definition. Sei $0 < p \leq \infty$ und $f_n \in \mathcal{L}^p (n \in \mathbb{N})$. Die Folge $(f_n)_{n\geq 1}$ heißt *im p-ten Mittel konvergent gegen* $f \in \mathcal{L}^p$, falls $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$, also wenn $(f_n)_{n\geq 1}$ in $\mathcal{L}^p$ gegen $f \in \mathcal{L}^p$ konvergiert.

Die Folge $(f_n)_{n\geq 1}$ heißt eine *Cauchy-Folge* in $\mathcal{L}^p$ oder eine *Cauchy-Folge für die Konvergenz im p-ten Mittel*, falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $\|f_m - f_n\|_p < \epsilon$ für alle $m, n \geq n_o(\epsilon)$.

Ist $p = 2$ so spricht man von *Konvergenz im quadratischen Mittel.*
Ist $p = 1$ so spricht man von *Konvergenz im Mittel.*

2.2. Definition. Sei $A \subset X$, dann verstehen wir unter der *charakteristischen* oder *Indikatorfunktion* von A eine Funktion $\chi_A : X \to \mathbb{R}$

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \in A^c \end{cases}$$

Für $A, B \subset X$ gilt $A \subset B$ genau dann, wenn $\chi_A \leq \chi_B$ ist. Daher ist eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Teilmengen genau dann monoton wachsend (fallend), wenn die Folge $(\chi_{A_n})_{n\in\mathbb{N}}$ wachsend (fallend) ist. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} \chi_{A\cap B} &= \chi_A \cdot \chi_B \\ \chi_A + \chi_B &= \chi_{A\cup B} + \chi_{A\cap B} \\ \chi_{A^c} &= 1 - \chi_A \\ \chi_{A\setminus B} &= \chi_A(1 - \chi_B) \end{aligned}$$

2.3. Satz. Für jede wachsende Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen aus $\mathcal{T}^+$ und jedes $v \in \mathcal{T}^+$ mit $v \leq \lim_{n\to\infty} u_n$ gilt

$$\int_X v d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_X u_n d\mu.$$

Beweis.
Sei $v = \sum_{j=1}^m \alpha_j \chi_{A_j}$ mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \geq 0$ und disjunkten $A_1, \ldots, A_m \in \mathfrak{A}$. Für ein festes $\beta > 1$ und $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $B_n := \{\beta u_n \geq v\}$ $(\in \mathfrak{A})$. Ist $x \in X$ und $v(x) = 0$, so ist $x \in B_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Im Falle $v(x) > 0$ ist $\lim_{k\to\infty} \beta u_k(x) > v(x)$, also $x \in B_n$ für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$. Es folgt $B_n \uparrow X$ und nach Definition von B_n ist $\beta u_n \geq v \cdot \chi_{B_n}$. Weiterhin folgt dann, dass

$$\begin{aligned} \int_X v d\mu &= \sum_{j=1}^m \alpha_j \mu(A_j) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^m \alpha_j \mu(A_j \cap B_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_X v \cdot \chi_{B_n} d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \beta \int_X u_n d\mu = \beta \lim_{n\to\infty} \int_X u_n d\mu. \end{aligned}$$

Der Grenzübergang $\beta \downarrow 1$ liefert die Behauptung. $\square$

2.4. Korollar. Für alle $f \in \mathcal{M}^+$ gilt

$$\int_X f d\mu = \sup\{\int_X u d\mu : u \in \mathcal{T}^+, u \leq f\}.$$

Beweis.
Für alle $u \in \mathcal{T}^+$ mit $u \leq f$ gilt $\int_X f d\mu \geq \int_X u d\mu$, also

$$\int_X f d\mu \geq \sup\{\int_X u d\mu : u \in \mathcal{T}^+, u \leq f\}.$$

Die Umkehrung gilt aufgrund der Integraldefinition ebenfalls. □

2.5. Satz. ***(monotone Konvergenz)*** Für jede wachsende Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen aus $\mathcal{M}^+$ gilt

$$\int_X (\lim_{n\to\infty} f_n) d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Beweis.
$\Leftarrow$: Zunächst ist $f := \lim_{n\to\infty} f_n \in \mathcal{M}^+$. Für alle $k \in \mathbb{N}$ ist $f_k \leq f$, also $\int_X f_k d\mu \leq \int_X f d\mu$ und daher

$$\lim_{k\to\infty} \int_X f_k d\mu \leq \int_X f d\mu.$$

$\Rightarrow$ Sei $u \in \mathcal{T}^+$, $u \leq f$. Für $\beta > 1$ setzen wir $B_n := \{\beta f_n \geq u\}$ und erhalten: $B_n \in \mathfrak{A}$, $B_n \uparrow X$ und $\beta f_n \geq u \cdot \chi_{B_n}$. Hier gilt $u \cdot \chi_{B_n} \in \mathcal{T}^+$ und $u \cdot \chi_{B_n} \uparrow u$. Nun impliziert Satz 2.3.

$$\int_X u d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_X u \cdot \chi_{B_n} d\mu \leq \beta \cdot \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu,$$

und da $\beta > 1$ beliebig, folgt weiter

$$\int_X u d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

□

2.6. Satz. ***(Lemma von Fatou)*** Für jede Folge von Funktionen $f_n \in \mathcal{M}^+$ $(n \in \mathbb{N})$ gilt:

$$\int_X \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Beweis.
Es gilt, dass $f := \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n \in \mathcal{M}^+$ und für $g_n := \inf_{k\geq n} f_k \in \mathcal{M}^+$ gilt $g_n \uparrow f$. Der Satz der monotonen Konvergenz liefert

$$\lim_{n\to\infty} \int_X g_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

Für alle $k \geq n$ ist aber $g_n \leq f_k$ und daher $\int_X g_n d\mu \leq \inf_{k\geq n} \int_X f_k d\mu$,also

$$\int_X f d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} \int_X f_k d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

□

2.7. Satz. ***(majorisierte Konvergenz)*** Die Funktionen $f, f_n : X \to \mathbb{K} \quad (n \in \mathbb{N})$ seien meßbar und es gelte $lim_{n\to\infty} f_n = f \quad \mu$-f.ü.. Ferner gebe es eine integrierbare Funktion $g \in \mathcal{M}^+$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $|f_n| \leq g \quad \mu$-f.ü..Dann sind f und alle $f_n \quad (n \in \mathbb{N})$ integrierbar und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0.$$

Beweis.
Wir wissen, dass f und $f_n \quad (n \in \mathbb{N})$ integrierbar sind. Daher können wir annehmen, dass f, g und alle $f_n \quad (n \in \mathbb{N})$ überall Werte in $\mathbb{K}$ haben und dass überall gilt, dass $\lim_{n\to\infty} f_n = f, |f_n| \leq g \quad (n \in \mathbb{N})$. Dann ist $g_n := |f| + g - |f_n - f| \in \mathcal{M}^+ \quad (n \in \mathbb{N})$, und das Lemma von FATOU liefert

$$\begin{aligned}
\int_X (|f| + g) d\mu &= \int_X \underline{\lim}_{n\to\infty} g_n d\mu \\
&\leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_X g_n d\mu \\
&= \int_X (|f| + g) d\mu - \overline{\lim}_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| d\mu.
\end{aligned}$$

Hier ist das Integral von $|f| + g$ endlich. Daher folgt: $\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$. Wegen

$$\left| \int_X f_n d\mu - \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f_n - f| d\mu.$$

folgt die Behauptung. □

2.8. Satz. ***(von Riesz-Fischer)*** Die Räume $\mathcal{L}^p$ $(0 < p \leq \infty)$ sind vollständig, das heißt: Zu jeder Cauchy-Folge $(f_n)_{n\geq 1}$ in $\mathcal{L}^p$ gibt es ein $f \in \mathcal{L}^p$, sodass $\|f_n - f\|_p \to 0$ $(n \to \infty)$.

Beweis.
$\underline{1 \leq p < \infty:}$. Es gibt eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ von $(f_n)_{n\geq 1}$, sodass $\|f_{n_k} - f_m\|_p \leq 2^{-k} \quad \forall m \geq n_k, k \geq 1$. Mit $g_k := f_{n_k} - f_{n_{k+1}}$ gilt dann für alle $n \geq 1$:

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} |g_k| \right\|_p \leq \sum_{k=1}^{n} \|g_k\|_p \leq \sum_{k=1}^{n} 2^{-k} < 1.$$

Der Satz der monotonen Konvergenz impliziert $N_p(\sum_{k=1}^{\infty} |g_k|) \leq 1$, also konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ μ-f.ü. absolut. Daher konvergiert die Folge $(f_{n_1} - f_{n_k})_{k\geq 1}$ μ-f.ü. gegen eine meßbare Funktion $X \to \mathbb{K}$, das heißt es gibt eine meßbare Funktion $f : X \to \mathbb{K}$, sodass $f_{n_k} \to f$ $(k \to \infty)$ μ-f.ü.

Wir zeigen, dass $f \in \mathcal{L}^p$ und $\|f_n - f\|_p \to 0 \quad (n \to \infty)$. Dazu sei $\epsilon > 0$, dann gibt es ein $n_0(\epsilon)$, sodass $\|f_l - f_m\|_p < \epsilon \quad \forall l, m \geq n_o(\epsilon)$. Eine Anwendung des Lemmas von FATOU auf die Folge $(|f_{n_k} - f_m|^p)_{k\geq 1}$ ergibt:

Für alle $m \geq n_0(\epsilon)$ ist

$$\int_X |f - f_m|^p d\mu = \int_X \underline{\lim}_{k\to\infty} |f_{n_k} - f_m|^p d\mu \leq \underline{\lim}_{k\to\infty} \int_X |f_{n_k} - f_m|^p d\mu \leq \epsilon^p.$$

Falls $1 \leq p < \infty$ folgt die Behauptung.

$\underline{0 < p < 1:}$ $\|\cdot\|_p^p$ genügt der Dreiecksungleichung und die obigen Schlüsse liefern bei Ersetzung von $\|\cdot\|_p$ durch $\|\cdot\|_p^p$ die Behauptung.

$\underline{p = \infty:}$ Sei $(f_n)_{n\geq 1}$ eine Cauchy-folge in $\mathcal{L}^\infty$. Dann ist

$$N := \bigcup_{n=1}^{\infty} \{|f_n| > \|f_n\|_\infty\} \cup \bigcup_{m,n=1}^{\infty} \{|f_m - f_n| > \|f_m - f_n\|_\infty\}$$

eine Nullmenge und $\forall x \in N^c$ gilt

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \|f_m - f_n\|_\infty \qquad (m, n \in \mathbb{N}).$$

Daher konvergiert $(f_n)_{n\geq 1}$ auf N^c *gleichmäßig* gegen $f := \lim_{n\to\infty} \chi_{N^c} \cdot f_n \in \mathcal{L}^\infty$. Insbesondere ist $f \in \mathcal{L}^\infty$ und $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$. □

2.9. Korrolar. Für $1 \leq p \leq \infty$ ist L^p ein Banach-Raum und für $0 < p < 1$ ist L^p ein vollständiger metrischer Raum.

2.10. Korrolar. Es sei $0 < p \leq \infty$.

(a) Zu jeder Cauchy-folge $(f_n)_{n\geq 1}$ in $\mathcal{L}^p$ gibt es eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ und ein $f \in \mathcal{L}^p$ sodass $f_{n_k} \to f$ μ-f.ü.

(b) Konvergiert die Folge $(f_n)_{n\geq 1}$ gegen ein $f \in \mathcal{L}^p$, so existiert eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\geq 1}$, die μ-f.ü. gegen f konvergiert.

Beweis.

(a) folgt unmittelbar aus dem Beweis des Satzes von RIESZ-FISCHER

(b) $(f_n)_{n\geq 1}$ ist eine Cauchy-Folge in $\mathcal{L}^p$. Nach dem Beweis des Satzes von RIESZ-FISCHER gibt es ein $g \in \mathcal{L}^p$ mit $\|f_n - g\|_p \to 0$ und eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\geq 1}$, die μ-f.ü. gegen g konvergiert. Wegen $\|f_n - f\|_p \to 0$ ist aber $f = g$ μ-f.ü.

□

2.11. Beispiel.
Es seien $X = [0,1]$, $\mathfrak{A} := \mathfrak{B}^1_X$, $\mu = \beta^1_X$. Wir zählen die Intervalle $[0,1], [0,\frac{1}{2}]$ $, [\frac{1}{2},1]$, $[0,\frac{1}{3}]$, $[\frac{1}{3},\frac{2}{3}], [\frac{2}{3},1], [0,\frac{1}{4}], ..$ ab zu einer Folge von Intervallen I_n $(n \geq 1)$. Dann gibt es zu jedem $x \in X$ unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $x \in I_n$ und unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $x \notin I_n$. Die Folge der Funktionen $f_n := \chi_{I_n}(n \in \mathbb{N})$ divergiert daher in jedem Punkt $x \in X$. Andererseits gilt für $0 < p < \infty$

$$\|f_n\|_p^p = \int_X |f_n|^p d\beta^1 = \beta^1(I_n) \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

das heißt $(f_n)_{n\geq 1}$ konvergiert in jedem $\mathcal{L}^p(\mu)$ $(0 < p < \infty)$ gegen Null.

2.12. Beispiel.
Jede Cauchy-Folge $(f_n)_{n\geq 1}$ in $\mathcal{L}^p(0 < p \leq \infty)$ ist beschränkt in dem Sinne, dass die Folge $(\|f_n\|_p)_{n\geq 1}$ in $\mathbb{R}$ beschränkt ist. Es stellt sich nun die Frage, ob jede beschränkte Folge von Funktionen aus $\mathcal{L}^p$ eine fast überall konvergente Teilfolge hat. Die Antwort ist negativ:

Es seien $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ wie in Beispiel 2.11. und $f_n(x) := exp(2\pi inx)$. Dann ist $\|f_n\|_p = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ und $0 < p \leq \infty$. Angenommen, es gebe eine streng monoton wachsende Folge $(n_k)_{k\geq 1}$ natürlicher Zahlen und eine Funktion $f : X \to \mathbb{K}$ mit $f_{n_k} \to f$ f.ü.. Offenbar gilt

$$\int_X f_{n_{k+1}} \overline{f}_{n_k} d\beta^1 = 0 \qquad \forall k \geq 1,$$

und der Satz von der majorisierten Konvergenz liefert

$$\int_X f_{n_{k+1}} \overline{f}_{n_k} d\beta^1 \to \int_X |f|^2 d\beta^1 \qquad (k \to \infty).$$

Daher ist $f = 0$ f.ü. im Widerspruch zu $|f_{n_k}| = 1$.

2.13. Satz. Ist $0 < p < p' \leq \infty$ und $\mu(X) < \infty$, so ist $\mathcal{L}^{p'} \subset \mathcal{L}^p$ und

$$\|f\|_p \leq \mu(X)^{1/p-1/p'} \|f\|_{p'} \quad \forall f \in \mathcal{L}^p,$$

das heißt Konvergenz in $\mathcal{L}^{p'}$ impliziert Konvergenz in $\mathcal{L}^p$ (mit gleichem Limes).

Beweis.
Der Fall $p' = \infty$ ist klar. Für $0 < p < p' < \infty$ setzen wir $r := p'/p$, $s := (1 - 1/r)^{-1}$. Wir wenden die Höldersche Ungleichung, unter Verwendung der Exponenten r, s, auf die Funktionen $|f|^p, 1$ an, wobei $f \in \mathcal{L}^{p'}$. Dann folgt

$$\int_X |f|^p d\mu \leq (\int_X |f|^{pr} d\mu)^{1/r} (\mu(X))^{1/s}.$$

Es folgt: $f \in \mathcal{L}^p$ und

$$\|f\|_p \leq (\mu(X))^{1/p-1/p'} \|f\|_{p'}.$$

□

3.1. Definition. Ein Banach-Raum $(V, \|\cdot\|)$ über $\mathbb{K}$ heißt eine *Banach-Algebra*, wenn eine Multiplikation $\cdot : V \times V \to V$ erklärt ist, die V zu einer $\mathbb{K}$-Algebra macht, sodass

$$\|x \cdot y\| \leq \|x\| \, \|y\| \qquad (x, y \in V).$$

Eine Banach-Algebra mit kommutativer Multipliaktion heißt *kommutativ.*

3.2. Beispiel. Für jedes Kompaktum $X \subset \mathbb{R}^n$ ist die Menge $C(X)$ der stetigen Funktionen $f : X \to \mathbb{K}$ mit der Supremumsnorm

$$\|f\| := \sup \{|f(x)| : x \in X\}$$

und den üblichen punktweisen Verknüpfungen eine kommutative Banach-Algebra mit Einselement.

3.3. Definition. ***(Faltung auf $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^p, \mathfrak{B}^p, \beta^p)$)*** Die Faltung zweier Funktionen $f, g \in \mathcal{L}^1(\beta^p)$, ist die Funktion $f * g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{K}$

$$f * g(x) := \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^p} f(x-y)g(y)d\beta^p(y) & x \in A^c \\ 0 & x \in A \end{cases}$$

Diese Funktion ist Borel-meßbar und $f*g \in \mathcal{L}^1(\beta^p)$. Weiterhin ist sie kommutativ, assoziativ und distributiv.

3.4. Definition. ***(Fourier-Transformation)*** Anstelle von β^p verwenden wir nun

$$\mu_p := (2\pi)^{-p/2}\beta^p$$

als Maß. Für komplexwertiges $f \in \mathcal{L}^1(\mu_p)$ heißen $\hat{f}, \check{f} : \mathbb{R}^p \to \mathbb{C}$

$$\hat{f}(t) := \int_{\mathbb{R}^p} e^{-i\langle t,x\rangle} f(x) d\mu_p(x) \qquad (t \in \mathbb{R}^p)$$

die *Fourier-Transformierte* von f und

$$\check{f}(t) := \int_{\mathbb{R}^p} e^{i\langle t,x\rangle} f(x) d\mu_p(x) = \hat{f}(-t) \qquad (t \in \mathbb{R}^p)$$

die *inverse Fourier-Transformierte* von f. Die $\mathbb{C}$-lineare Abbildung, die jedem $f \in \mathcal{L}^1(\mu_p)$

seine Fourier-Transformierte $\hat{f}$ zuordnet, heißt *Fourier-Transformation.*

3.5. Satz. $L^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}^m, \beta^m)$ ist bezüglich der Faltung als Multiplikation eine kommutative Banach-Algebra ohne Einselement.

4.1. Definition: Hilbert-Raum $L^2(\mu)$. Für $f, g \in \mathcal{L}^2(\mu)$ ist $f\overline{g} \in \mathcal{L}^1(\mu)$, denn $f\overline{g}$ ist meßbar und $|f\overline{g}| \leq \frac{1}{2}(|f|^2 + |g|^2)$. Offenbar ist $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{L}^2 \times \mathcal{L}^2 \to \mathbb{K}$,

$$\langle f, g \rangle := \int_X f\overline{g} d\mu \qquad (f, g \in \mathcal{L}^2)$$

eine *positiv semidefinite hermitesche Form* auf $\mathcal{L}^2$ (das heißt es ist $\langle f, f \rangle \geq 0, \langle \alpha f + \beta g, h \rangle = \alpha \langle f, h \rangle + \beta \langle g, h \rangle$ und $\overline{\langle f, g \rangle} = \langle g, f \rangle \ \forall f, g, h \in \mathcal{L}^2, \ \alpha, \beta \in \mathbb{K}$), und es gilt

$$\|f\|_2 = \langle f, f \rangle^{1/2} \quad (f \in \mathcal{L}^2).$$

Die Form $\langle \cdot, \cdot \rangle$ hat alle Eigenschaften eines Skalarproduktes mit Ausnahme der Definitheit, denn es ist $\langle f, f \rangle = 0$ genau dann, wenn $f = 0$ f.ü.. Die Definitheit wird nun durch Übergang zu $L^2(\mu)$ hergestellt: Sind $F, G \in L^2$, so hat $\langle f, g \rangle$ für alle Vertreter f, g von F bzw. G denselben Wert und

$$\langle F, G \rangle := \langle f, g \rangle$$

definiert ein *Skalarprodukt* auf L^2, welches durch

$$\|F\|_2 = \langle F, F \rangle^{1/2}$$

die Norm von L^2 induziert. Ein Banach-Raum $(H, \|\cdot\|)$ auf dem ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, das kann z.B. $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$ $(x \in H)$ sein, die Norm von H induziert, heißt *Hilbert-Raum.*

4.2. Satz. $L^2(\mu)$ ist ein Hilbert-Raum mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_X f\overline{g} d\mu \qquad (f, g \in L^2(\mu)).$$

4.3. Bemerkung. Wählt man insbesondere μ gleich dem Zählmaß auf $I = \mathbb{N}$ oder $\mathbb{Z}$, so folgt:

Der *Hilbertsche Folgenraum*

$$l^2(I) := \left\{ x \in \mathbb{K}^I : \sum_{j \in I} |x_j|^2 < \infty \right\}$$

ist ein Hilbert-Raum mit dem Skalarprodukt

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j \in I} x_j y_j \qquad (x, y \in l^2(I)).$$

4.4. Definition Orthonormalsystem

Es sei H ein Hilbert-Raum mit dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Eine Familie $(e_j)_{j \in I}$ $(I \subset \mathbb{Z})$ von Elementen von H heißt ein *Orthonormalsystem*, falls $\langle e_j, e_k \rangle = \delta_{jk} \ \forall j, k \in I$.

Ein Orthonormalsystem $(e_j)_{j\in I}$ in H heißt *vollständig*, falls $Span(e_j : j \in I)$ dicht in H liegt.

4.5. Satz von der besten Approximation. Ist $(e_j)_{1\le j\le n}$ ein Orthonormalsystem in H, so gibt es zu jedem $f \in H$ genau ein $g \in Span(e_1, \dots, e_n)$ mit

$$\|f-g\| = \inf\left\{\|f-h\| : h \in Span(e_1,\dots,e_n)\right\},$$

und zwar

$$g = \sum_{j=1}^{n} \langle f, e_j\rangle e_j.$$

Für dieses g gilt:

$$\|f-g\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{j=1}^{n} |\langle f, e_j\rangle|^2.$$

Beweis.
Für $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ ist

$$\left\| f - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j \right\|^2 = \|f\|^2 - 2Re\sum_{j=1}^{n} \overline{\lambda_j}\langle f, e_j\rangle + \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^2 = \|f\|^2 - \sum_{j=1}^{n} |\langle f, e_j\rangle|^2 + \sum_{j=1}^{n} |\langle f, e_j\rangle - \lambda_j|^2.$$

4.6. Besselsche Ungleichung.

Sind $(e_j)_{j\in I}$ ein Orthonormalsystem in H und $f \in H$, so konvergiert $\sum_{j\in I} |\langle f, e_j\rangle|^2$, und es gilt

$$\sum_{j\in I} |\langle f, e_j\rangle|^2 \le \|f\|^2 .$$

4.7. Korollar. Sind $(e_j)_{j\in I}$ ein Orthonormalsystem in H und $\lambda_j \in \mathbb{K}$ $(j \in I)$, so gilt: Es gibt ein $f \in H$ mit $\langle f, e_j\rangle = \lambda_j$ $(j \in I)$ genau dann, wenn $\sum_{j\in I} |\lambda_j|^2 < \infty$.

Beweis.
Die Notwendigkeit der Bedingung folgt aus (1.3). Ist umgekehrt $\sum_{j\in I} |\lambda_j|^2 < \infty$ und E eine endliche Teilmenge von I, so ist

$$\left\| \sum_{j\in E} \lambda_j e_j \right\|^2 = \sum_{j\in E} |\lambda_j|^2.$$

Das heißt das Cauchy-Kriterium für die Konvergenz der Reihe $\sum_{j\in I}\lambda_j e_j$ ist erfüllt. Wegen der *Vollständigkeit* von H definiert die Reihe also ein Element $f \in H$ und die Stetigkeit des Skalarproduktes impliziert $\langle f, e_j\rangle = \lambda_j \ (j \in I)$. □

4.8. Satz. Ist $(e_j)_{j\in I}$ ein Orthonormalsystem in H, so sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) $(e_j)_{j\in I}$ ist vollständig.

(b) Für jedes $f \in H$ gilt der Entwicklungssatz

$$f = \sum_{f\in I}\langle f, e_j\rangle e_j$$

(c) Für alle $f, g \in H$ gilt die Parsevalsche Gleichung

$$\langle f, g\rangle = \sum_{j\in I}\langle f, e_j\rangle\langle e_j, g\rangle.$$

(d) Für alle $f \in H$ gilt die Vollständigkeitsrelation

$$\|f\|^2 = \sum_{j\in I}|\langle f, e_j\rangle|^2.$$

(e) $(e_j)_{j\in I}$ ist ein maximales Orthonormalsystem.

(f) Ist $f \in H$ und $\langle f, e_j\rangle = 0$ für alle $j \in I$, so gilt $f = 0$.

Beweis.
$\underline{(a) \Rightarrow (b):}$ Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es eine endliche Menge $E \subset I$ und Elemente $\lambda_j \in \mathbb{K}$ $(j \in E)$, so dass $\left\|f - \sum_{j\in E}\lambda_j e_j\right\| < \epsilon$. Nach dem Satz von der besten Approximation gilt daher für jede endliche Menge J mit $E \subset J \subset I$:

$$\left\|f - \sum_{j\in J}\langle f, e_j\rangle e_j\right\| \le \left\|f - \sum_{j\in E}\lambda_j e_j\right\| < \epsilon.$$

$\underline{(b) \Rightarrow (c):}$ Für jede endliche Menge $E \subset I$ ist nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung für das Skalarprodukt

$$|\langle f, g\rangle - \sum_{j\in E}\langle f, e_j\rangle\langle e_j, g\rangle| = |\langle f - \sum_{j\in E}\langle f, e_j\rangle e_j, g\rangle| \le \left\|f - \sum_{j\in E}\langle f, e_j\rangle e_j\right\| \|g\|.$$

$\underline{(c) \Rightarrow (d):}$ offensichtlich.

$\underline{(d) \Rightarrow (a):}$ Für jede endliche Menge $E \subset I$ ist nach (1.2)

$$\left\|\langle f, g\rangle - \sum_{j\in E}\langle f, e_j\rangle e_j\right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{j\in E}|\langle f, e_j\rangle|^2.$$

$(b) \Rightarrow (f)$: offensichtlich.

$(f) \Rightarrow (e)$: Ist $(e_j)_{j\in I}$ nicht maximal, so existiert ein $f \in H, \|f\| = 1$ mit $\langle f, e_j\rangle = 0 \ \forall j \in I$ im Widerspruch zu (f).

$(e) \Rightarrow (b)$: Für jedes $f \in H$ ist $g := \sum_{j\in I}\langle f, e_j\rangle e_j \in H$ und es gilt $\langle f, e_j\rangle = \langle g, e_j\rangle \ \forall j \in I$. Gilt (b) nicht, so existiert ein $f \in H$ mit $f \neq g$. Dies widerspricht (e), da sich $(e_j)_{j\in I}$ um $\|f-g\|^{-1}(f-g)$ erweitern lässt. □

4.9. Satz. ***(F. Riesz)*** Ist $(e_j)_{j\in I}$ ein Orthonormalsystem in $L^2(\mu)$ und $\alpha_j \in \mathbb{K}$ $(j \in I)$, so ist $\sum_{j\in I}|\alpha_j|^2 < \infty$ die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass es ein $f \in L^2(\mu)$ gibt mit $\langle f, e_j\rangle = \alpha_j \ \forall j \in I$.

4.10. Definition.

Sind $(H_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_1)$ und $(H_2, \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$ zwei Hilbert-Räume, so heißt eine bijektive lineare Abbildung $\phi : H_1 \to H_2$ mit $\langle\phi(u), \phi(u)\rangle_2 = \langle u, v\rangle_1$ $(u, v \in H_1)$ eine *Isometrie*.

4.11. Isomorphiesatz. Ist $(e_j)_{j\in I}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in $L^2(\mu)$, so ist die Abbildung $\phi : l^2(I) \to L^2(\mu)$, mit

$$\phi((\alpha_j)_{j\in I}) := \sum_{j\in I}\alpha_j e_j \qquad ((\alpha_j)_{j\in I} \in l^2(I))$$

ein Isomorphismus.

4.12. Vollständigkeit des trigonometrischen Systems.

Gegeben sei der Maßraum $([0,1], \mathfrak{B}^1_{[0,1]}, \beta^1_{[0,1]})$ und die zugehörigen Räume $L^p([0,1])$ $(1 \leq p \leq \infty)$, $\mathbb{K} := \mathbb{C}$. Es sei $e_n(t) := \exp(2\pi int)$ $(n \in \mathbb{Z}, t \in [0,1])$. Dann ist $e_n \in L^\infty([0,1])$ und $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ist ein Orthonormalsystem in $L^2([0,1])$. Dann ist das Orthonormalsystem $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ in $L^2([0,1])$ vollständig.

Beweis.
Wir beweisen im folgenden eine noch schärfere Aussage: Für jedes $f \in L^1([0,1])$ und $n \in \mathbb{Z}$ ist der n-te Fourier-Koeffizient

$$\hat{f}(n) := \int_0^1 f(t)e^{-2\pi int}dt$$

und somit die *Fourier-Transformation* $\hat{} : L^1([0,1]) \to \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}, f \mapsto (\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ erklärt. Die Vollständigkeit von $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ in $L^2([0,1])$ ist bewiesen, wenn wir zeigen können, dass die *Fourier-Transformation* $L^1([0,1]) \to \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ injektiv ist.

Wir werden zeigen, dass aus $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}([0,1])$ und $\hat{f} = 0$, $f = 0$ f.ü. folgt. Dies tuen wir in 2 Schritten

(1) Es sei zunächst $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ stetig mit $\hat{f} = 0$. Für jedes trigonometrische Polynom, das heißt für jede (endliche) Linearkombination T der e_n $(n \in \mathbb{Z})$ gilt

$$\int_0^1 f(x)T(x)dx = 0.$$

Wegen $\overline{e_n} = e_{-n}$ $(n \in \mathbb{Z})$ sind mit T auch $\overline{T}$ und daher auch $Re(T), Im(T)$ trigonometrische Polynome. Aus (1.4.) folgt dann für alle T:

$$\int_0^1 (Re(f(x)))T(x)dx = 0, \qquad \int_0^1 (Im(f(x))T(x)dx = 0.$$

Somit kann man sich im Folgenden auf die Betrachtung reellwertiger f beschränken.

Angenommen, es sei $f \neq 0$. Dann gibt es ein $x_0 \in (0,1)$ mit $f(x_0) \neq 0$. Sei o.B.d.A. $f(x_0) > 0$. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ und ein $\delta > 0$, sodass $f(x) \geq \epsilon$ für $0 < x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta < 1$. Wir setzen nun für $n \in \mathbb{N}$:

$$T_n(x) := (1 + \cos 2\pi(x - x_0) - \cos 2\pi\delta)^n.$$

Dann ist T_n ein trigonometrisches Polynom mit folgende Eigenschaften:

1. $T_n(x) \geq 0$ für $x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta$;
2. $T_n(x) \geq (1 + \cos \pi\delta - \cos 2\pi\delta)^n \to \infty$ für $|x - x_0| \leq \delta/2$;
3. $|T_n(x)| \leq 1$ für $x \in [0, x_0 - \delta] \cup [x_0 + \delta, 1]$.

Daher gilt:

$$\begin{aligned} |\int_0^1 f(x)T_n(x)dx| &\geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)T_n(x)dx - |\int_0^{x_0-\delta} f(x)T_n(x)dx + \int_{x_0+\delta}^1 f(x)T_n(x)dx| \\ &\geq \epsilon\delta(1 + \cos \pi\delta - \cos 2\pi\delta)^n - \int_0^1 |f(x)|dx \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \end{aligned}$$

Das ist ein Widerspruch zu (1.4.). Es folgt, dass $f = 0$.

(2) Es sei nun $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}([0,1])$ mit $\hat{f} = 0$ und $F(x) := \int_0^x f(t)dt \quad (x \in [0,1])$. Dann ist $F : [0,1] \to \mathbb{K}$ stetig mit $F(1) = \hat{f}(0) = 0 = F(0)$. Mittels partieller Integration folgt nun für alle $n \neq 0$:

$$\hat{F}(n) = \int_0^1 F(x)e^{-2\pi inx}dx = -\int_0^1 f(x)(-\frac{1}{2\pi in})(e^{-2\pi inx} - 1)dx = \frac{1}{2\pi in}(\hat{f}(n) - \hat{f}(0)) = 0.$$

Daher ist $h := F - \hat{F}(0)$ eine stetige Funktion mit $\hat{h} = 0$ und nach dem ersten Schritt ist $h = 0$, also $F = \hat{F}(0)$. Wegen $F(0) = 0$ ist $F = 0$, demnach $f = 0$ f.ü.. □

4.13. Korrollar. Die Fourier-Transformation $\hat{}: L^2([0,1]) \to l^2(\mathbb{Z})$ ist ein Isomorphismus.

Beweis. Folgt aus den Sätzen (4.11.) und (4.12.). $\square$

4.14. Korollar. Für jedes $f \in L^2([0,1])$ konvergiert die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e_n$ im *quadratischen Mittel* gegen f und es gelten die Vollständigkeitsrelation

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2$$

und die Parsevalsche Gleichung

$$\langle f, g\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)} \qquad (f, g \in L^2([0,1])).$$

Beweis. Folgt aus (4.9.) und (4.12.). $\square$

4.15. Bemerkung. Ist $f \in \mathcal{L}^2([0,1])$, so existiert nach (2.8.) eine Teilfolge der Folge der Partialsummen $\sum_{|k|\leq n} \hat{f}(k)e_k$ $(n \in \mathbb{N})$ der Fourier-Reihe von f, die punktweise f.ü. gegen f konvergiert. Weiterhin konvergiert selbst die Folge der Teilsummen punktweise f.ü. gegen f.

Literatur

[1] Jürgen Elstrodt *"Maß- und Integrationstheorie"*, Springer Verlag, Heidelberg, 2007

[2] Harro Heuser *"Analysis 2"*, B.G. Teubner Verlag, Wiesbaden, 2004

[3] Harro Heuser *"Funktionalanalysis"*, B.G. Teubner Verlag, Wiesbaden, 2006

[4] I. N. Bronstein und K. A. Semendjajew, *"Taschenbuch der Mathematik"*, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 2003